Номер 69.3(а)

Найти длину дуги пространственной кривой:

$$x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}, 0 < t < +\infty$$

Решение

Данная кривая выглядит, как изображено на Рис. 1

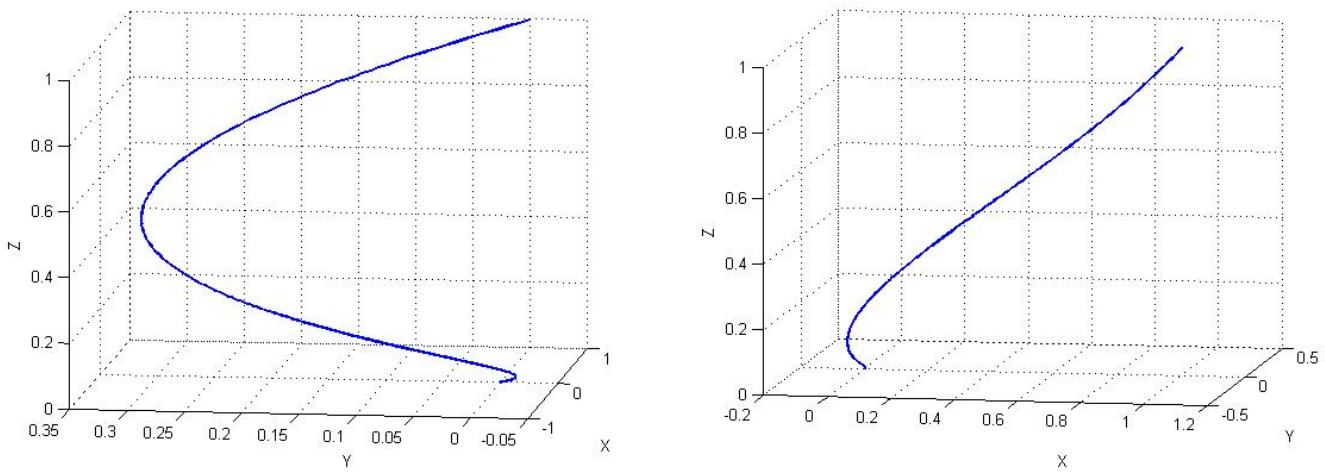


Рис. 1. График дуги пространственной кривой с разных точек обзора

Длина дуги OA вычисляется по формуле:

$$L = \int\limits_{OA} dS$$

Найдем дифференциал дуги:

$$dS = \sqrt{e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{-2t}} =$$
$$= e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + 1} = e^{-t}\sqrt{3}$$

Значит, длина дуги равна:

$$L = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{3}dt = \sqrt{3}$$

Номер 69.3(б)

Найти длину дуги пространственной кривой:

$$(x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$$

от точки $O(0;0;0)$ до точки $A(x_0;y_0;z_0)$

Решение

Данная кривая выглядит, как изображено на Рис. 2 (график построен при $a = 1$)

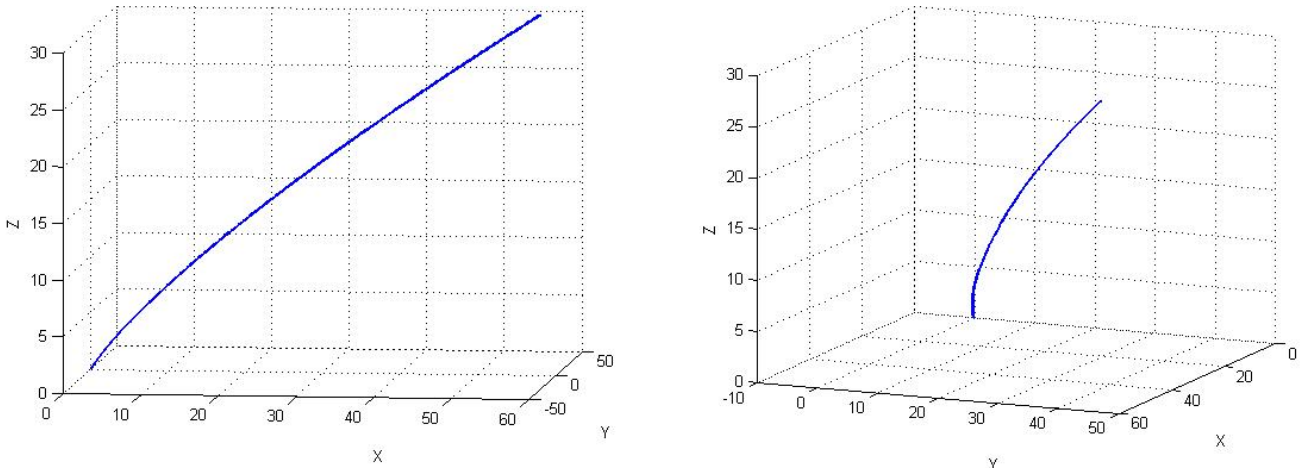


Рис. 2. График дуги пространственной кривой с разных точек обзора

Сделаем замену:

$$x - y = s$$
$$x + y = t$$
$$z = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{st}$$

Откуда:

$$x = \frac{s^2 + as}{2a}$$
$$y = \frac{s^2 - as}{2a}$$
$$z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}s\sqrt{s}$$

Длина дуги равна:

$$L = \int_0^{t_0} \sqrt{\frac{(2s+a)^2}{4a^2} + \frac{(2s-a)^2}{4a^2} + \frac{2}{a}}sds = \int_0^{t_0} \sqrt{2\frac{s^2}{a^2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{a}}sds = \int_0^{t_0} \sqrt{2(\frac{s}{a} + \frac{1}{2})^2}ds =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{t_0} (\frac{s}{a} + \frac{1}{2})ds = \frac{3z_0}{4\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3z_0}{a}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{a{z_0}^2}$$

Номер 69.3(в)

Найти длину дуги пространственной кривой:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2}\cosh(arctg\frac{y}{x}) = a$$

от точки $A(a; 0; 0)$ до точки $B(x; y; z)$

Решение

Данная кривая выглядит, как изображено на Рис. 3 (график построен при $a = 1$)

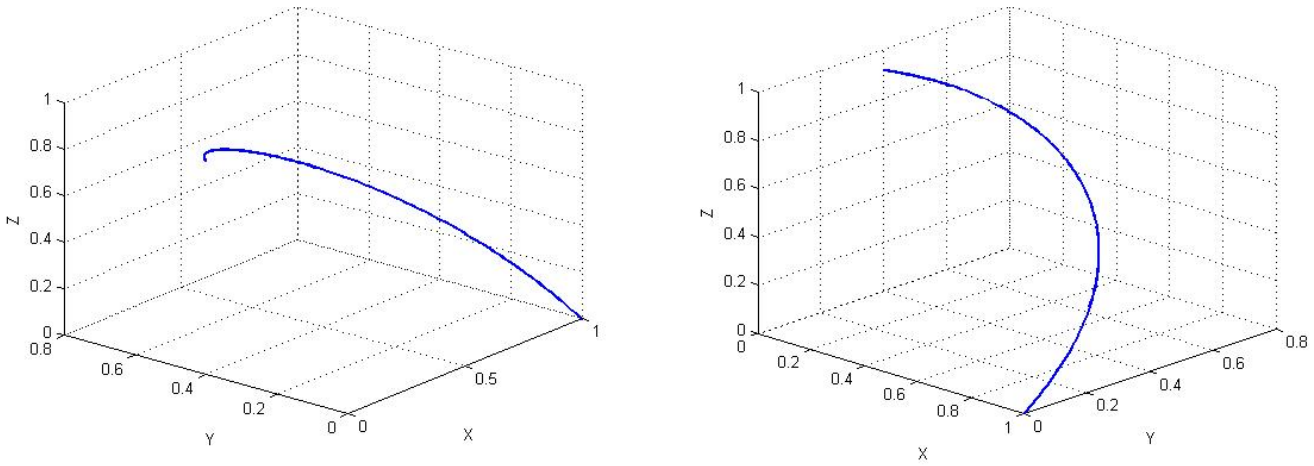


Рис. 3. График дуги пространственной кривой с разных точек обзора

Воспользуемся сферической заменой координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = a\sin\psi$$

Значит:

$$\psi = \arccos(\frac{1}{\cosh\varphi})$$

Откуда:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\cosh\varphi}$$
$$y = \frac{a\sin\varphi}{\cosh\varphi}$$
$$z = a\sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2\varphi}} = a\tanh\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\frac{-\sin\varphi\cosh\varphi - \cos\varphi\cosh\varphi}{\cosh^2\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a\frac{\cos\varphi\cosh\varphi - \sin\varphi\sinh\varphi}{\cosh^2\varphi}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = a\frac{a}{\cosh^2\varphi}$$

Длина дуги равна:

$$L = \int\limits_0^{\arctan\frac{y_0}{x_0}} \frac{\sqrt{\sin^2\varphi\cosh^2\varphi + \cos^2\varphi\sinh^2\varphi + \cos^2\varphi\cosh^2\varphi + \sin^2\varphi\sinh^2\varphi + 1}}{\cosh^2\varphi} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}a \int\limits_0^{\arctan\frac{y_0}{x_0}} \frac{d\varphi}{\cosh^2\varphi} = \sqrt{2}a\tanh(\arctan\frac{y_0}{x_0})$$

Номер 69.6(а)

Вычислить криволинейный интеграл, взятый вдоль пространственной кривой, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x:

$$\int\limits_C (y-x)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

где C - окружность:

$$\left\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x\tan\alpha, 0 < \alpha < \pi\right\};$$

Решение

Кривая выглядит, как представлено на Рис. 4 (построена при $a = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$)

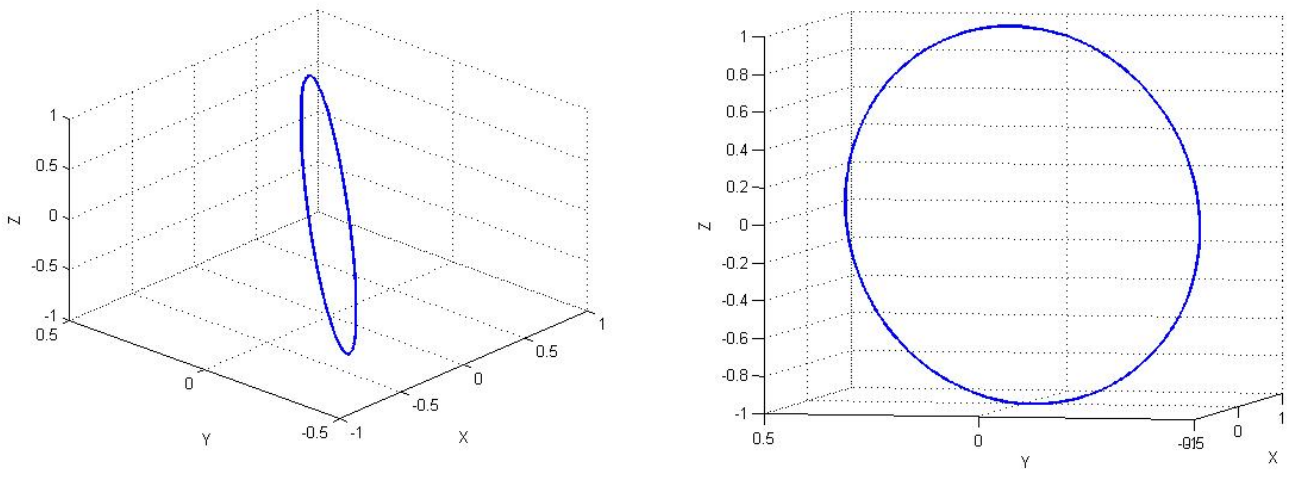


Рис. 4. График дуги пространственной кривой с разных точек обзора

Используем сферичекую замену координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = a\sin\psi$$

Тогда

$$\varphi = \alpha, \varphi = \alpha + \pi$$

Значит, исходный интеграл равен:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a\sin\alpha\cos\psi - a\sin\psi)(-a\cos\alpha\sin\psi) + (a\sin\psi - a\cos\alpha\cos\psi)(-a\sin\alpha\sin\psi) +$$

$$+(a\cos\alpha\cos\psi - a\sin\alpha\cos\psi)a\cos\psi d\psi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (a\sin\alpha\cos\psi + a\sin\psi)(-a\cos\alpha\sin\psi) +$$

$$+(a\sin\psi + a\cos\alpha\cos\psi)a\sin\alpha\sin\psi - (a\cos\alpha\cos\psi - a\sin\alpha\cos\psi)a\cos\psi d\psi =$$

$$= 2a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\alpha - \sin\alpha)d\psi = 2a^2\pi(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Номер 69.6(б)

Вычислить криволинейный интеграл, взятый вдоль пространственной кривой, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x:

$$\int\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz,$$

где C - часть кривой Вивиани:

$$\left\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z \geqslant 0\right\};$$

Решение

Кривая выглядит, как представлено на Рис. 5 (построена при $a = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$)

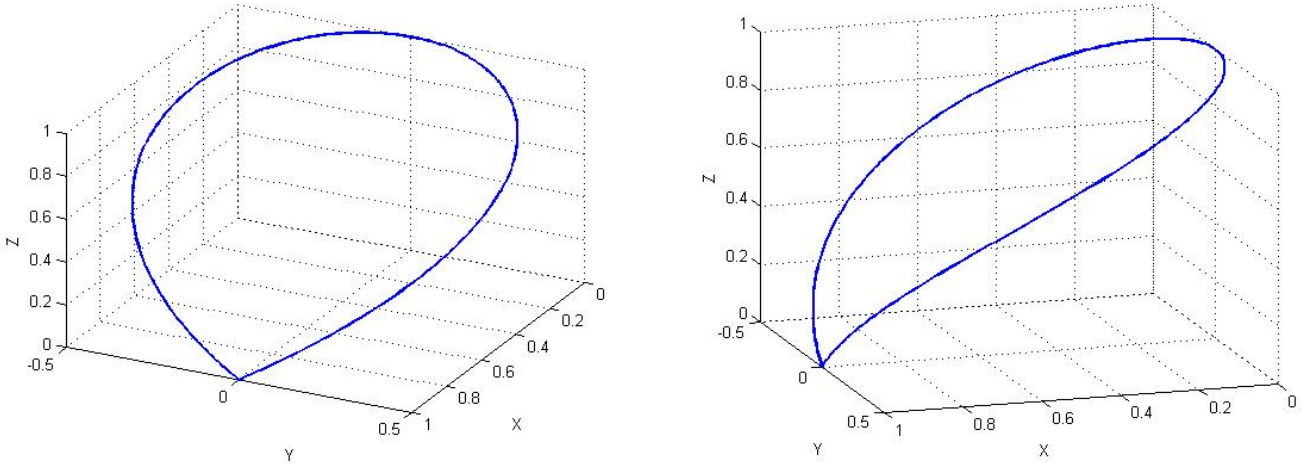


Рис. 5. График дуги пространственной кривой с разных точек обзора

Используем сферичекую замену координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = a\sin\psi$$

Тогда исходный интеграл равен:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi a2\cos\varphi(-\sin\varphi) + a^2\sin^2\varphi a\cos 2\varphi + a^2\cos^4\varphi a\cos\varphi d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi a2\cos\varphi(-\sin\varphi) + a^2\sin^2\varphi a\cos 2\varphi - a^2\cos^4\varphi a\cos\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2a^3}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \sin^3 2\varphi + a^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \sin^2\varphi\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} (1-\cos^2 2\varphi)d(\cos 2\varphi) +$$

$$+\frac{a^3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi - \frac{a^3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \cos^2 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi a^3}{4}$$

Номер 71.1(а)

Найти площадь поверхности тела, ограниченного цилиндрами:

$$x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$$

Решение

Поверхность выглядит, как изображено на Рис. 6 (фиксировано значение $a = 1$). Воспользуемся заменой координат:

$$x = a\cos\varphi$$
$$y = y$$
$$z = a\sin\varphi$$

Искомая площадь равна:

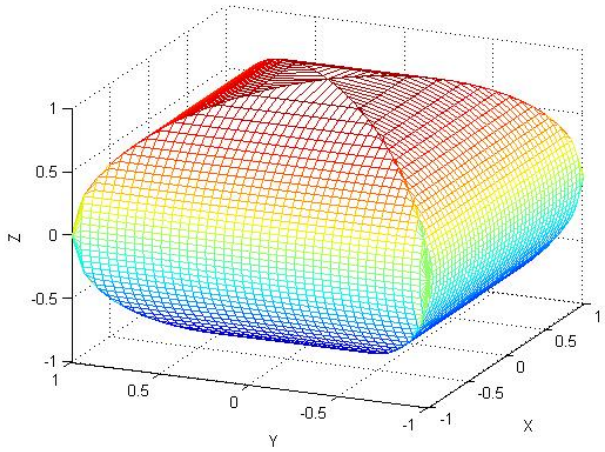


Рис. 6. Общий график - трехмерный

$$S = 4a\int\limits_0^a \int\limits_{-\arcsin\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}^{\arcsin\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}} yd\varphi dy = 8a\int\limits_0^a y\arcsin\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}dy = \left[1-\frac{y^2}{a^2} = t, dt = -2\frac{y}{a^2}dy\right] =$$

$$= 4a^3\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{t}dt = \left[\sqrt{t} = u, dt = 2udu\right] = 8a^3\int\limits_0^1 \arcsin u u du = 8a^3\int\limits_0^1 4d(u\arcsin u + \sqrt{1-u^2}) =$$

$$= 4a^3\pi - 8a^3\int\limits_0^1 u\arcsin u du - 2a^3\pi = 2\pi a^3$$

Номер 71.1(б)

Найти площадь части сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

заключенной внутри цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b \leqslant a$$

Решение

Данная поверхность выглядит, как представлено на Рис. 7 ($a = 2$, $b = 1$)

Сделаем сферическую замену координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = a\sin\psi$$

Площадь равна:

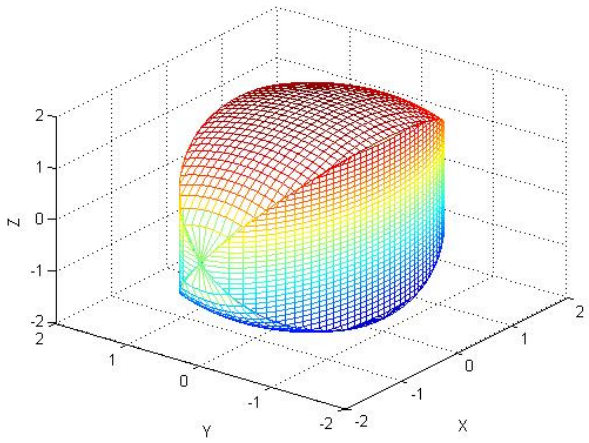


Рис. 7. Общий график - трехмерный

$$S = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}} a^2\cos\psi d\psi d\varphi = 8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sqrt1 - \frac{1}{\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi}} = [t=\cos\varphi] = 8a^2\sqrt{a^2-b^2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)t^2}} =$$

$$= 8a^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}t\right)\Big|_0^1 = 8a^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

Номер 71.1(в)

Найти площадь части поверхности

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

расположенной вне цилиндров

$$x^2+y^2=\pm ax$$

(задача Вивиани)

Решение

Данная кривая выглядит, как изображено на Рис. 8

Сделаем сферическую замену координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = a\sin\psi$$

$$EG - F^2 = a^4\cos^2\psi$$

Ограничение на φ:

$$|\cos\varphi| \leqslant \cos\psi$$

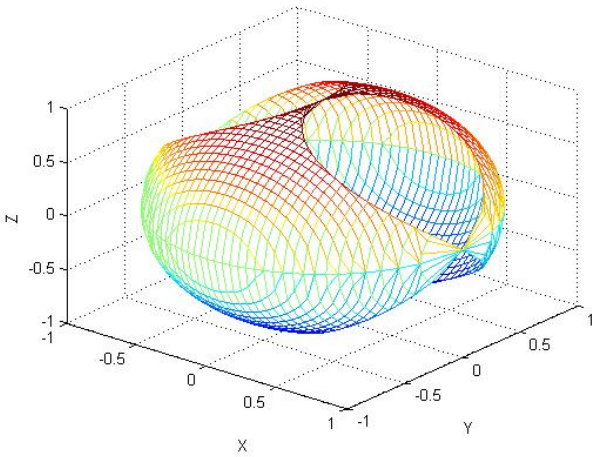


Рис. 8. Общий график - трехмерный

Поэтому искомая площадь равна:

$$S = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\varphi} a^2\cos\psi d\psi d\varphi = 8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi = 8a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^2$$

Номер 71.1(д)

Найти площадь части геликоида

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi, 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$$

Решение

На Рис. 9 построена данная поверхность при $h = 1$, $a = 2\pi$

$$E = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$
$$G = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + h^2 = r^2 + h^2$$
$$F = -r\cos\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi = 0$$
$$EG - F^2 = r^2 + h^2$$

Значит, площадь равна:

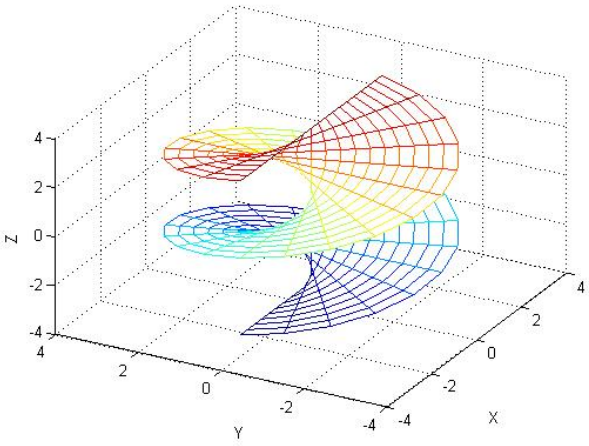


Рис. 9. Общий график - трехмерный

$$S = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + h^2}\, d\varphi dr = 2\pi \int_0^a dr =$$

$$= \left[t = \ln(\frac{a}{h} + \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + 1}) \right] = 2\pi h^2 \int_0^{\ln(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h})} \cosh^2 t dt = \pi h^2 \ln(\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}) + \pi h^2 \frac{a}{h}\sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} =$$

$$= \pi h^2 \ln(\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}) + \pi a\sqrt{a^2 + h^2}$$

Номер 71.1(е)

Найти площадь части поверхности тора

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, z = a\sin\psi, 0 < a \leqslant b,$$

ограниченной двумя параллелями ψ_1, ψ_2 и двумя меридианами φ_1, φ_2. Чему равна площадь поверхности всего тора?

Решение

На Рис. 10 изображена данная поверхность при $a = 1$, $b = 2$

$$E = (b + a\cos\psi)^2$$
$$G = a^2$$
$$F = -(b + a\cos\psi)\sin\varphi(b - a\cos\psi)\cos\varphi +$$
$$+(b + a\cos\psi)\cos\varphi(b - a\cos\psi)\sin\varphi = 0$$

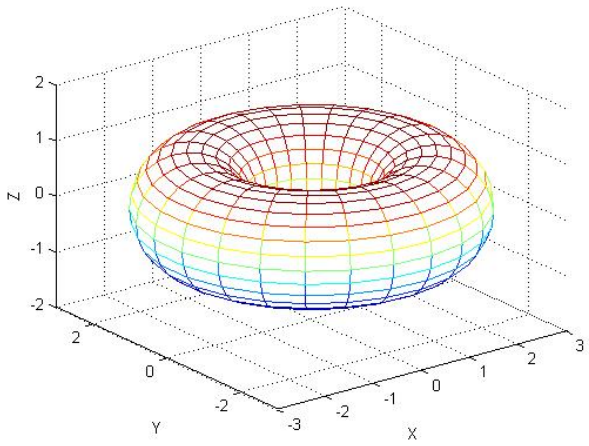


Рис. 10. Общий график - трехмерный

Значит, площадь равна:

$$S = a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}(b + a\cos\psi)d\psi d\varphi = a(\varphi_2 - \varphi_1)(b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1))$$

Получаем, что площадь полного тора равна $4\pi^2 ab$.

Номер 71.2

Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \frac{dS}{x + \sqrt{y^2 + z^2}},$$

где S - поверхность, полученная при вращении дуги параболы

$$x = a\cos^4 t, y = a\sin^4 t$$

относительно оси Ox

Решение

На Рис. 11 изображена данная поверхность при $a = 1$

Значит, площадь равна:

$$S = a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}(b + a\cos\psi)d\psi d\varphi =$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1)(b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1))$$

Получаем, что площадь полного тора равна $4\pi^2 ab$.

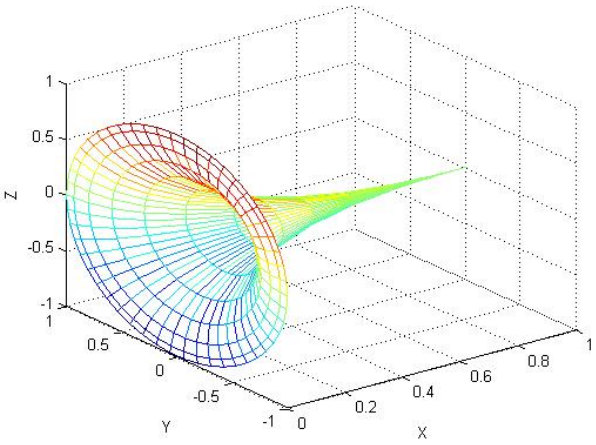


Рис. 11. Общий график - трехмерный

Номер 71.3(г)

Вычислить следующий поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint\limits_S z^2 dS,$$

где S - часть поверхности конуса:

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha,$$

$$0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \text{постоянная}$$

Решение

На Рис. 12 изображена данная поверхность при $a = 2\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

При вращении относительно оси Ox кривой:

$$x = a\cos^4 t$$
$$y = a\sin^4 t$$
$$y^2 + z^2 = a^2 \sin^8 t$$

,

получаем поверхность:

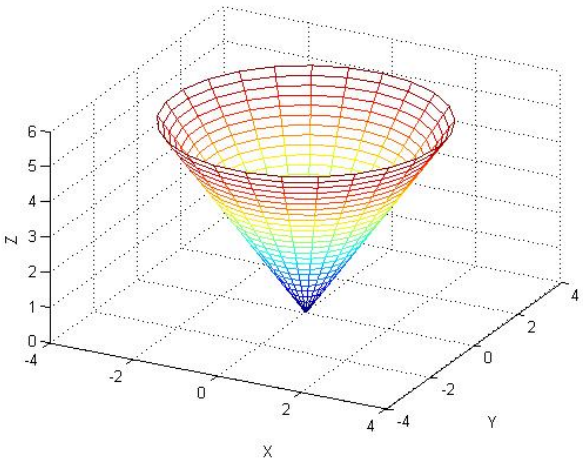


Рис. 12. Общий график - трехмерный

$$x = a\cos^4 t$$
$$y = a\sin^4 t\cos\varphi$$
$$z = a\sin^4 t\sin\varphi$$

Отсюда получаем:

$$E = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t\cos^2\varphi + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t\sin^2\varphi$$
$$G = a^2\sin^8 t$$
$$F = 0$$

Тогда данный интеграл равен:

$$\iint\limits_S \frac{dS}{x+\sqrt{y^2+z^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{4a^2\sqrt{\cos^6 t\sin^{10} t + \cos^2 t\sin^{14} t}}{a\cos^4 t + a\sin^4 t}dt = 2\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{4a|\cos t||\sin t|^5}{\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}dt =$$

$$= 32\pi a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\sin^5 t}{\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}dt = [u=\sin t] = 32\pi a\int\limits_0^1\frac{u^5 du}{\sqrt{(1-u^2)^2+u^4}} = \left[v=u^2\right] =$$

$$= 16\pi a\int\limits_0^1\frac{v^3 dv}{\sqrt{2v^2-2v+1}} = 16\pi a\int\limits_0^1\frac{v^2 dv}{2(v-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}} = \left[w=v-\frac{1}{2}\right] = 16\pi a\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(w+\frac{1}{2})^2 dw}{\sqrt{2w^2+\frac{1}{2}}} =$$

$$= 8\pi a\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(2w^2+\frac{1}{2})dw}{\sqrt{2w^2+\frac{1}{2}}} + 16\pi a\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{wdw}{\sqrt{2w^2+\frac{1}{2}}} = 16\sqrt{2}\pi a(\frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{1}{4\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}\pi a\ln(1+\sqrt{2})+4\pi a$$

Номер 72.4(а)

Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z},$$

где поверхность S представляет собой часть эллипсоида:

$$x = a\cos u\cos v, y = b\sin u\cos v, z = c\sin v, u \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right], v \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right],$$

ориентированного внешней нормалью.

Решение

На Рис. 13 изображена данная поверхность при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

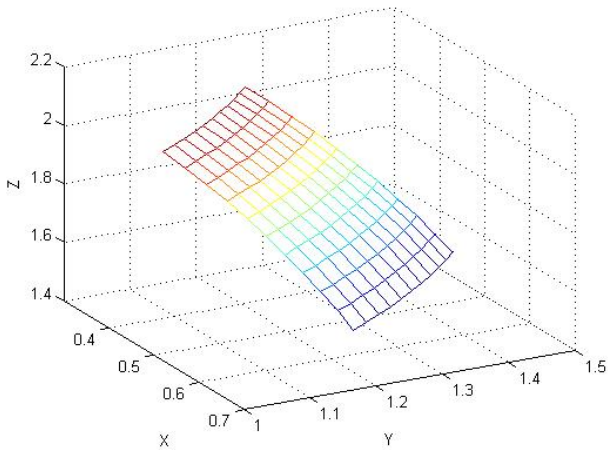


Рис. 13. Общий график - трехмерный

$$A = \begin{vmatrix} b\cos u\cos v & 0 \\ -b\sin u\sin v & c\cos v \end{vmatrix} = bc\cos u\cos^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -a\sin u\cos v \\ c\cos v & -a\cos u\sin v \end{vmatrix} = ac\sin u\cos^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v \end{vmatrix} = ab\sin v\cos v$$

Нормаль:

$$\overrightarrow{n} = \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Значит:

$$\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{bc\cos u\cos^2 v}{a\cos u\cos v} + \frac{ac\sin u\cos^2 v}{b\sin u\cos v} + \frac{ab\sin v\cos v}{c\sin v}\right)dvdu =$$

$$= \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}$$

Номер 73.4(а)

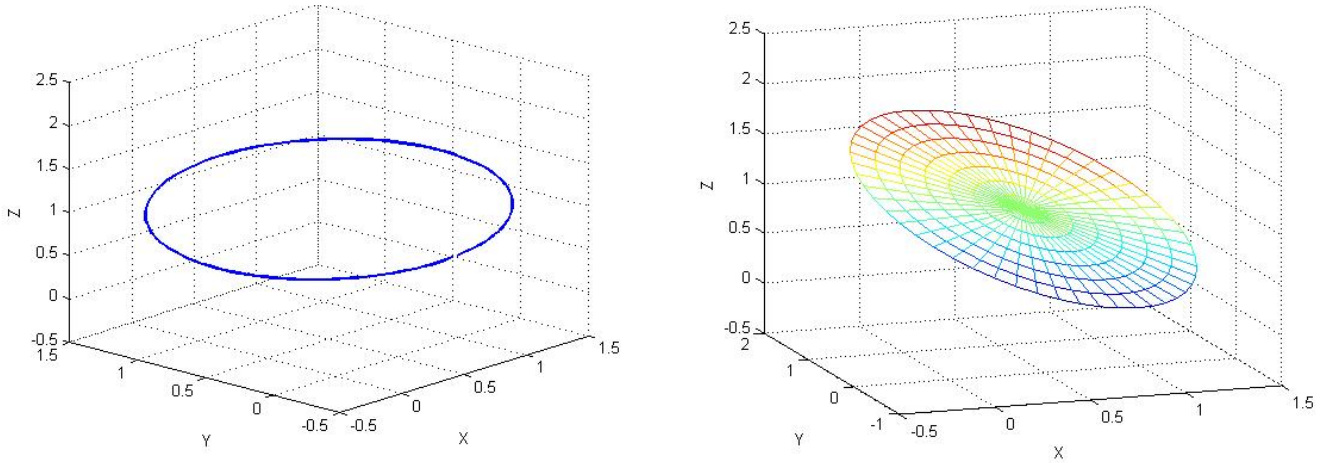
Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

где C - кривая пересечения параболоида $\{x^2 + y^2 + z = 3\}$ с плоскостью $\{x + y + z = 2\}$, ориентированная положительно.

Решение

На Рис. 14 построены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая б) Поверхность

Рис. 14. Графики кривой и поверхности

Нормаль к плоскости $z = 2 - x - y$ имеет следующие направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Поэтому:

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz = \iint_S (-\frac{1}{\sqrt{3}}(-2y-2z)-\frac{1}{\sqrt{3}}(-2x-2z)-\frac{1}{\sqrt{3}}(-2x-2y))dS =$$

$$= \iint\limits_{x^2-x+y^2-y\leqslant 1} (2y + 2(2x - y) + 2x + 2(2x - y) + 2x + 2y))dxdy = 12\pi$$

Номер 73.4(б)

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

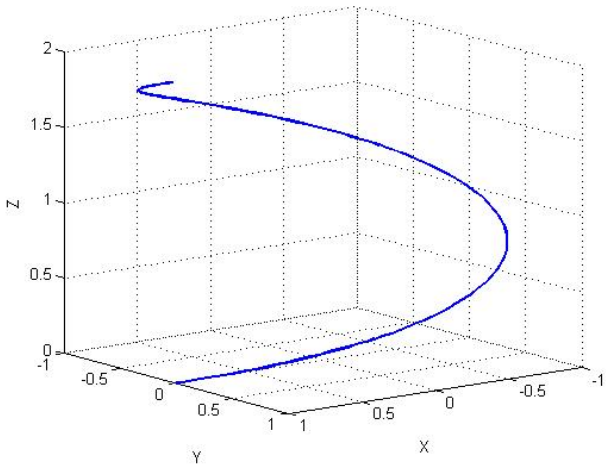
$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

где AmB - отрезок винтовой линии

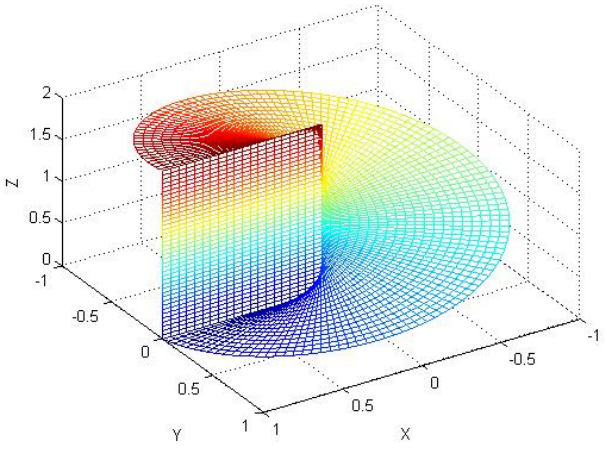
$$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \frac{h}{2\pi}\varphi, \varphi \in [0; 2\pi]$$

Решение

На Рис. 15 ($a = 1$, $h = 2$) изображены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая



б) Поверхность

Рис. 15. Графики кривой и поверхности

Поскольку

$$\oint\limits_{AmB} + \oint\limits_{BA} = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} dS = 0$$

Значит, искомый интеграл равен интегралу

$$\oint\limits_{AB} = \int\limits_0^h a^2 dz = a^2 h$$

Номер 73.4(в)

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz,$$

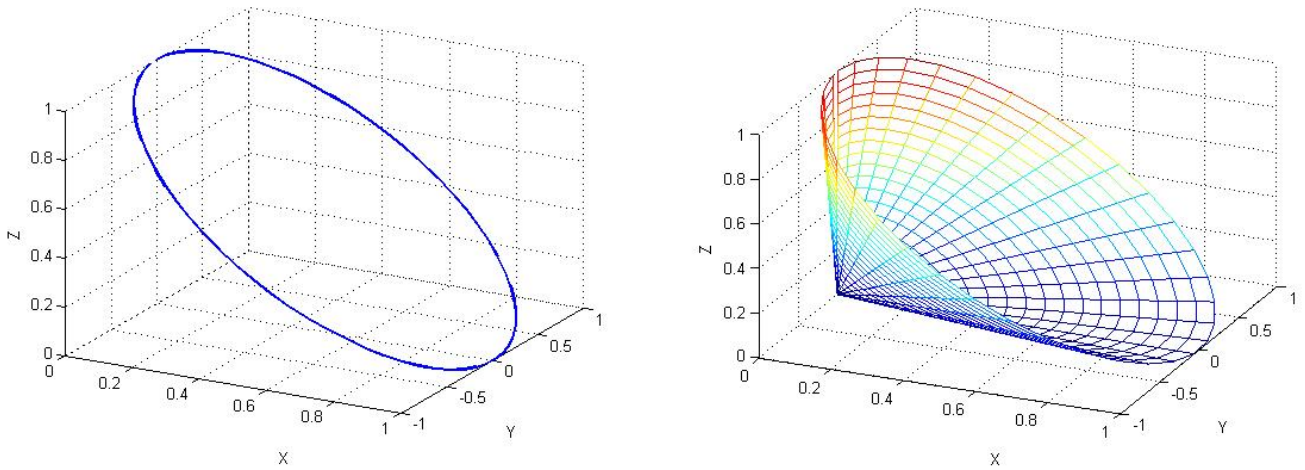
где C есть эллипс

$$x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t\cos t, z = a\cos^2 t, 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

Решение

На Рис. 16 ($a = 1$) изображены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая б) Поверхность

Рис. 16. Графики кривой и поверхности

$$\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} dS = 0$$

Номер 73.4(г)

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

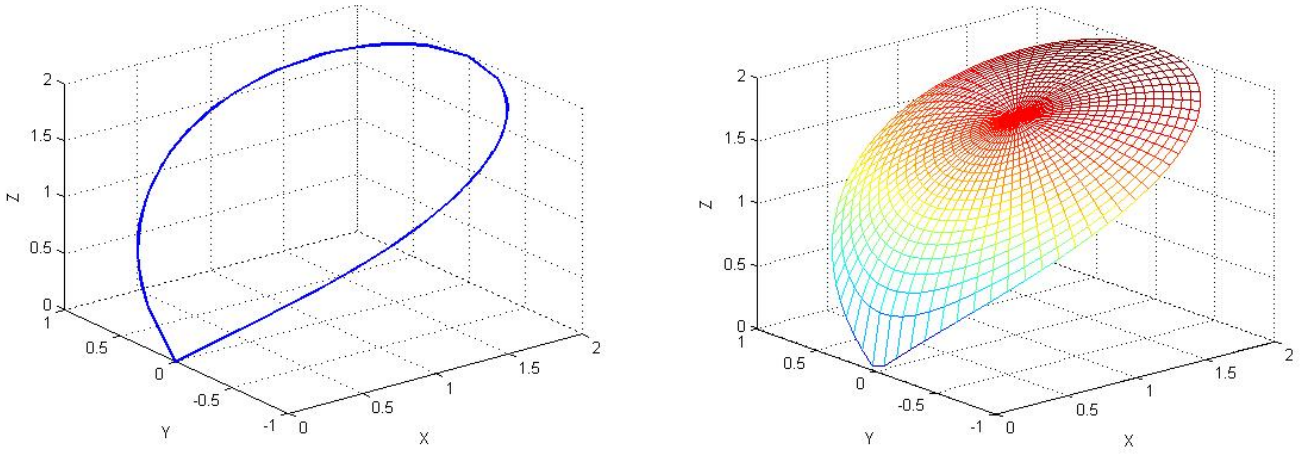
где C есть кривая

$$\left\{x^2+y^2+z^2 = 2Rx, x^2+y^2 = 2rx, 0 < r < R, z > 0\right\},$$

пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $\{x^2+y^2+z^2 = 2Rx\}$ наименьшая область, остается слева.

Решение

На Рис. 17 ($r = 1$, $R = 2$) построены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая б) Поверхность

Рис. 17. Графики кривой и поверхности

$$I = 2\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = 2\iint_S ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)dS$$

На множестве S выполнены равенства:

$$z = \sqrt{2Rx-x^2-y^2}, z'_x = \frac{R-x}{z}, z'_y = -\frac{y}{z}$$

Так как вектор n и орт k оси Oz образуют острый угол, то в формулах для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак " + ". Учитывая, что $dS = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}$, получим:

$$I = 2\iint\limits_D ((y - z(x,y))(-z'_x(x,y)) + (z(x,y) - x)(-z'_y(x,y)) + (x - y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (\frac{(y - z(x,y))(x - R) + (z(x,y) - x)y}{z(x,y)} + x - y)dxdy = 2R\iint\limits_D (1 - \frac{y}{z(x,y)})dxdy,$$

где $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 2rx\}$. Так как

$$\iint\limits_D \frac{y}{z(x,y)}dxdy = \int\limits_0^r dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} = 0,$$

то окончательно имеем:

$$I = 2R\iint\limits_D dxdy = 2\pi Rr^2$$

Номер 73.4(д)

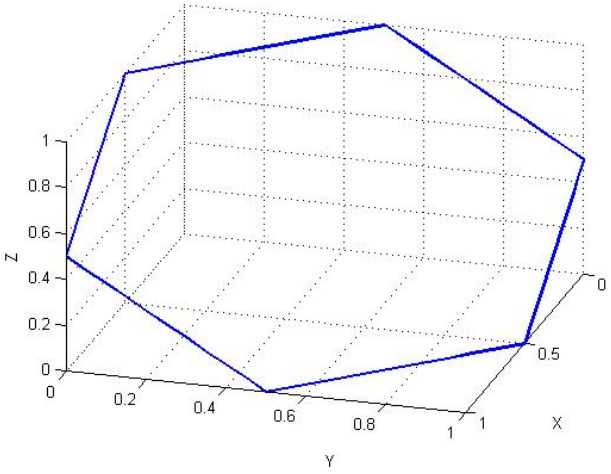
Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

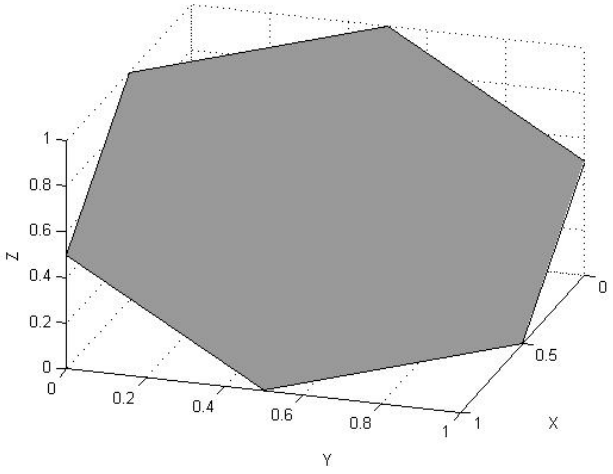
где C - сечение поверхности куба $\{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$ плоскостью $\left\{x + y + z = \frac{3}{2}a\right\}$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной стороны оси Ox.

Решение

На Рис. 18 ($a = 1$) построены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая



б) Поверхность

Рис. 18. Графики кривой и поверхности

Направляющие косинусы к поверхности:

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\oint\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_S (-2y - 2z - 2z - 2x - 2x - 2y)dS = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{3}{2}a \iint\limits_S dS = -\frac{9a^3}{2}$$

Номер 73.4(e)

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint\limits_C (y^2 * z^2)dx + (z^2 * x^2)dy + (x^2 * y^2)dz,$$

где C - замкнутая кривая

$$\{x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t\},$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

Решение

На Рис. 19 ($a = 1$) построена заданная кривая.

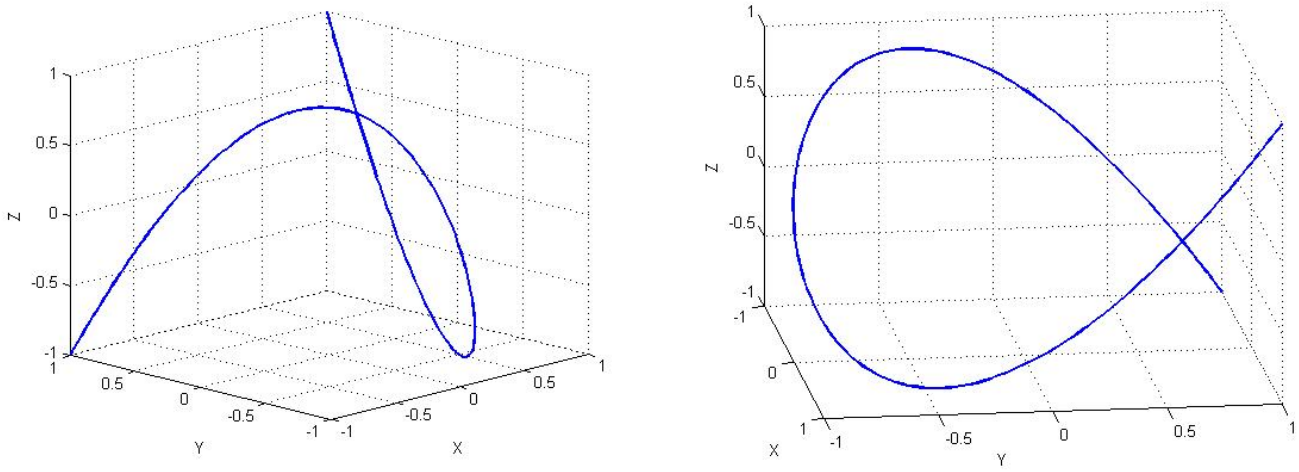


Рис. 19. График кривой с разных точек обзора

При изменении t от 0 до π подвижная точка $M = (x, y, z)$ пробегает часть заданной кривой от точки $M_0 = (a, a, a)$ до точки $M_1 = (-a, a, -a)$, а при изменении t от 0 до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой в противоположном направлении - от точки M_1 до точки M_0. Таким образом, точки замкнутой кривой взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакой поверхности. Поэтому $I = 0$.

Номер 73.4(ж)

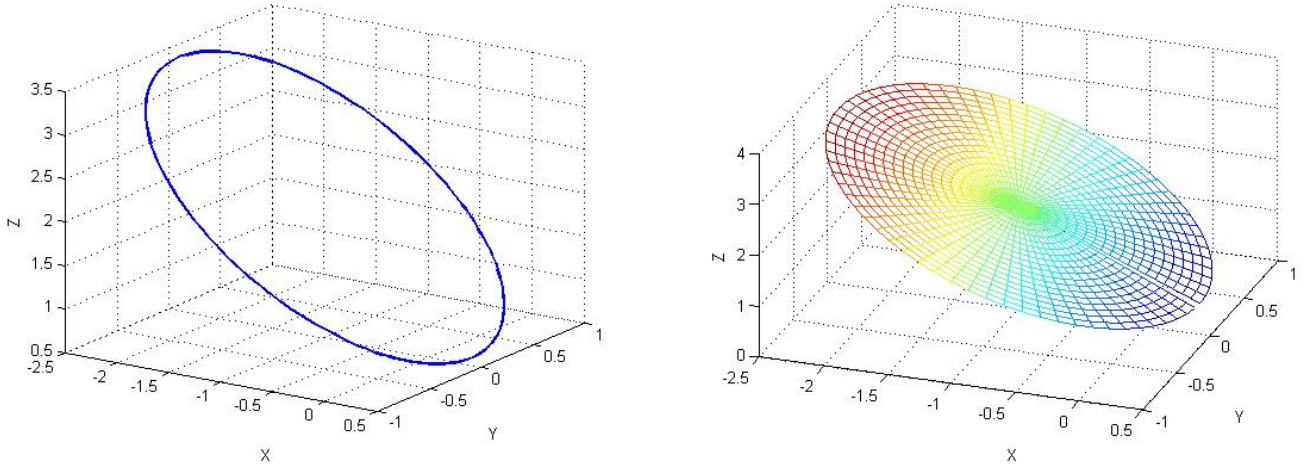
Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_C 2xydx + z^2dy + x^2dz,$$

где C - эллипс $\{2x^2 + 2y^2 = z^2, x + z = a\}$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

Решение

На Рис. 20 ($a = 1$) построены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая б) Поверхность

Рис. 20. Графики кривой и поверхности

Нормаль к поверхности:

$$\overrightarrow{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Значит:

$$\oint\limits_C 2xydx + z^2dy + x^2dz = \iint\limits_S (\frac{1}{\sqrt{2}}(-2z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-2x))dS = \sqrt{2}a \iint\limits_S dS = 2a \iint\limits_{(x+a)^2+2y^2 \leqslant 2a^2} dxdy =$$

$$= \left[x = -a + \sqrt{2}t\cos\varphi, y = r\sin\varphi, J = r\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}a \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^a rdrd\varphi = 2\pi\sqrt{2}a^3$$

Номер 73.4(з)

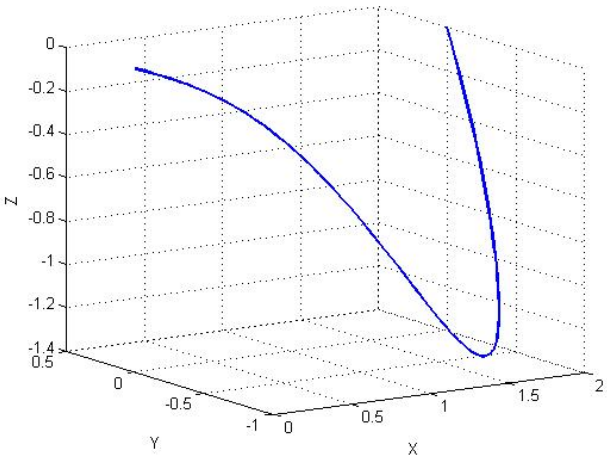
Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint\limits_L zdx + 2xdy - ydz,$$

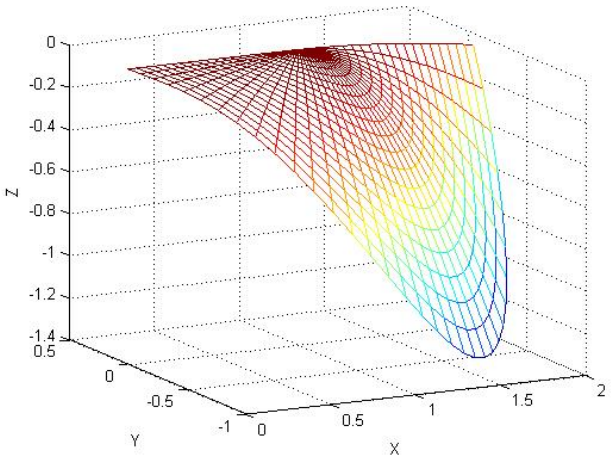
где L - кривая $\{x^2 + y^2 = 2ax, az = xy, z \geqslant 0\}$, от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(2a,0,0)$, $a > 0$.

Решение

На Рис. 21 ($a = 1$) изображены заданная кривая (а) и соответствующая поверхность (б), к которым применяется формула Стокса.



а) Кривая



б) Поверхность

Рис. 21. Графики кривой и поверхности

Нормаль к поверхности:

$$\overrightarrow{n} = (\frac{y}{a}, \frac{x}{a}, -1)$$

Значит:

$$\oint\limits_{L} zdx + 2xdy - ydz + \oint\limits_{BA} = \iint\limits_{S} (-\cos\alpha + \cos\beta + 2\cos\gamma)dS = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2ax} (-\frac{y}{a} + \frac{x}{a} - 2)dxdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} (-\frac{r}{a}\sin\varphi + 1 + r\cos\varphi - 2)rdrd\varphi = \frac{1}{6}a^2(3\pi(a-1) - 4)$$

Номер 74.2(б)

Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = -u + a\cos v, (u \geqslant 0, a > 0)$$

и плоскостями $x = 0$ и $z = 0$.

Решение

На Рис. 22 ($a = 1$) построена заданная поверхность.

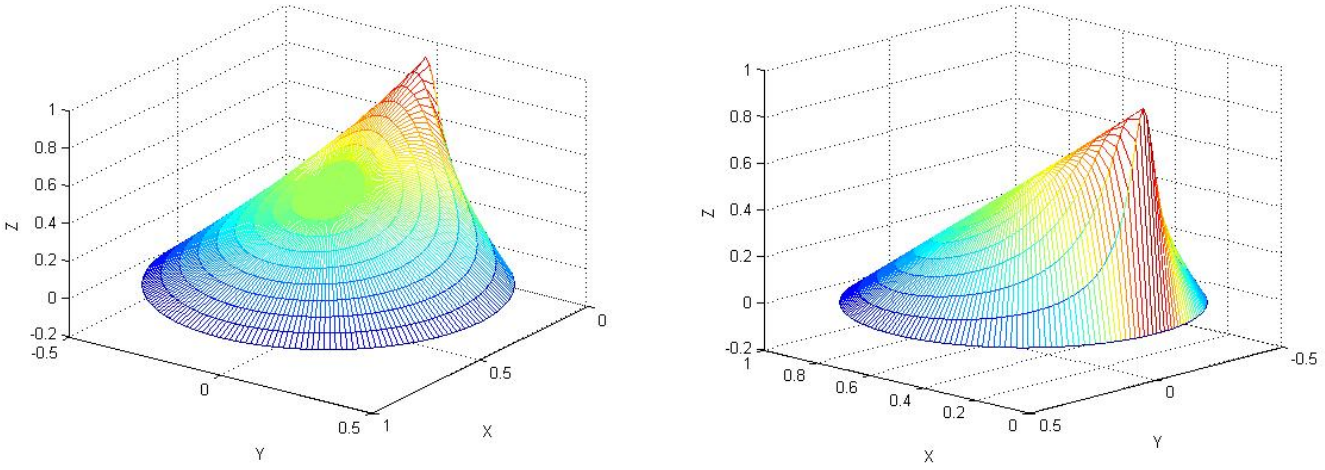


Рис. 22. График поверхности с разных точек обзора

Для вычисления объема применим формулу Остроградского:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = \frac{1}{3}(\iint_l imits_{S_1} + \iint_l imits_{S_2})$$

$$S_1 : z = \frac{ax - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Нормаль к S_1:

$$A = \begin{vmatrix} \sin v & -1 \\ u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix} = -a\sin^2 v + u\cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & \cos v \\ -a\sin v & -u\sin v \end{vmatrix} = u\sin v + a\sin v\cos v$$

$$C = u$$

$$\iint\limits_{S_1} dS = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{a\cos u} u\cos v(a\sin^2 v + u\cos v) + u\sin v(u\sin v + a\sin v\cos v) + (-u + a\cos v)ududv =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{a\cos u} au\cos vdudv = \frac{a^3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 vdv = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v)d(\sin v) = \frac{2a^3}{3}$$

$$S_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leqslant ax$$

Нормаль к S_2:

$$\overrightarrow{n} = (0, 0, -1)$$

$$\iint\limits_{S_2} dS = 0$$

Значит, объем равен:

$$V = \frac{2a^3}{9}$$

Номер 74.4(в)

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислите следующий поверхностный интеграл:

$$\int\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy,$$

где S - внешняя сторона поверхности

$$\{|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$$

Решение

На Рис. 23 построена заданная поверхность.

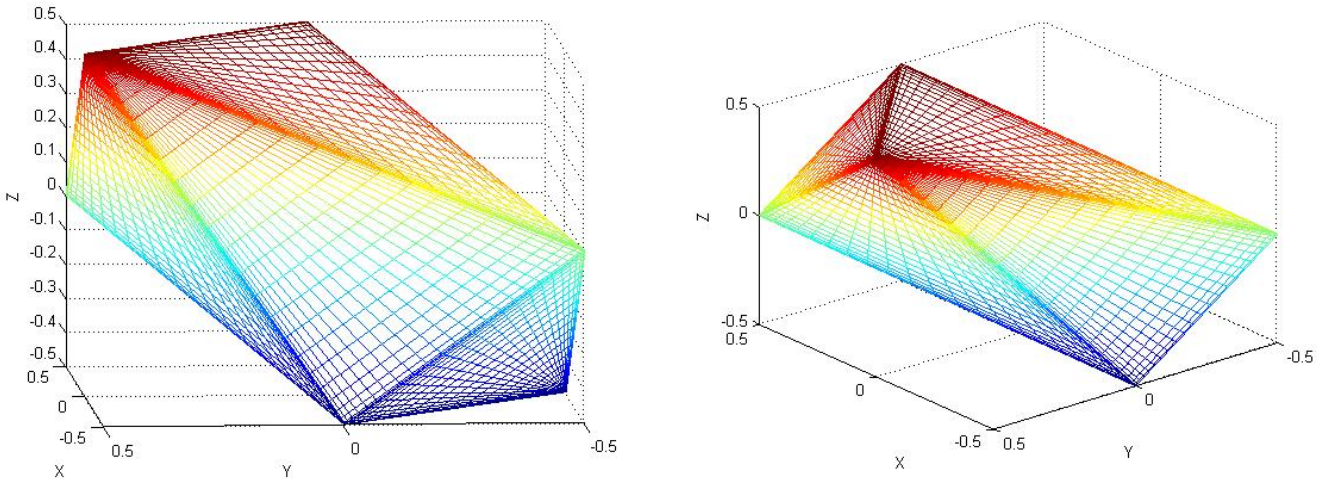


Рис. 23. График поверхности с разных точек обзора

T - тело, ограниченное поверхностью S. Тогда:

$$I = \iiint\limits_T (\frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x + y))dxdydz = 3\iiint\limits_T =$$

$$= \left[u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y, J = \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{4} \iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} dudvdw =$$

$$= 6\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{1-u-v} dw = 6\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} (1-u-v)dv = 6\int\limits_0^1 \frac{(1-u)^2}{2} du = 1$$

Номер 74.4(e)

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислите следующий поверхностный интеграл:

$$\int\limits_S y^2 dzdx - x^2 dydz + z^2 dxdy,$$

где S - часть поверхности тела

$$V = \left\{2x^2 + 2y^2 \leqslant az \leqslant x^2 + y^2 + a^2\right\}, a > 0$$

Решение

На Рис. 24 ($a = 1$) построена заданная поверхность.

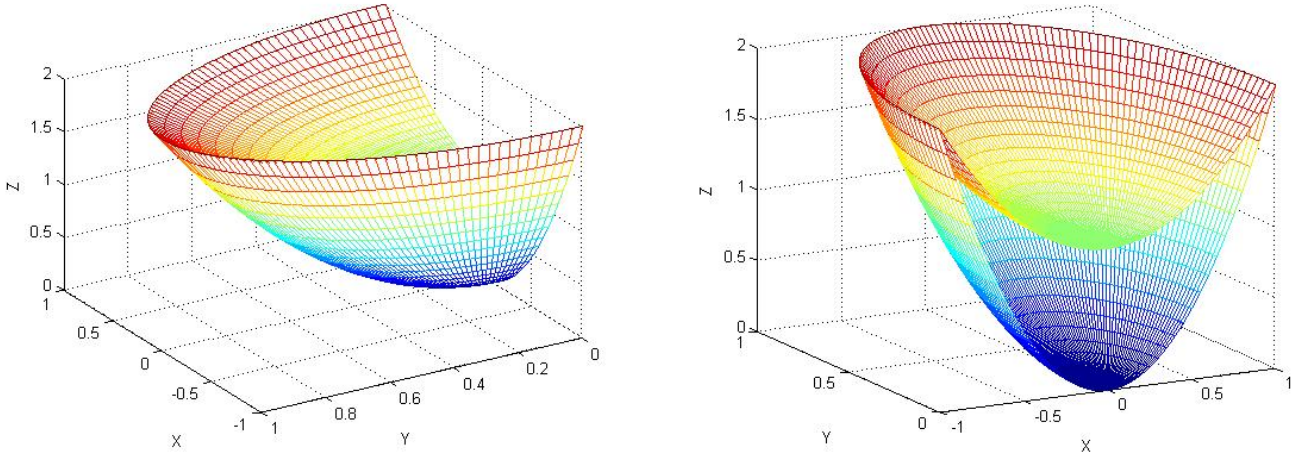


Рис. 24. График поверхности с разных точек обзора

$$\int\limits_S y^2 dzdx - x^2 dydz + z^2 dxdy = \iiint\limits_V (-2x+2y+2z)dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \int\limits_{\frac{2x^2+2y^2}{a}}^{\frac{x^2+y^2+a^2}{a}} (-2x+2y+2z)dzdxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} (-2x+2y)(\frac{a^2-x^2-y^2}{a})rdrd\varphi + \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} ((\frac{x^2+y^2+a^2}{a})^2 - (\frac{2x^2+2y^2}{a})^2)rdrd\varphi = a^3 + \frac{\pi a^4}{2}$$

Номер 75.8(а)

Найти поток поля:

$$\overrightarrow{a} = yi + zj + xk$$

через поверхность

$$S = \left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{r}\right\},$$

если нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена от начала координат.

Решение

На Рис. 25 ($r = 1$) построена заданная поверхность.

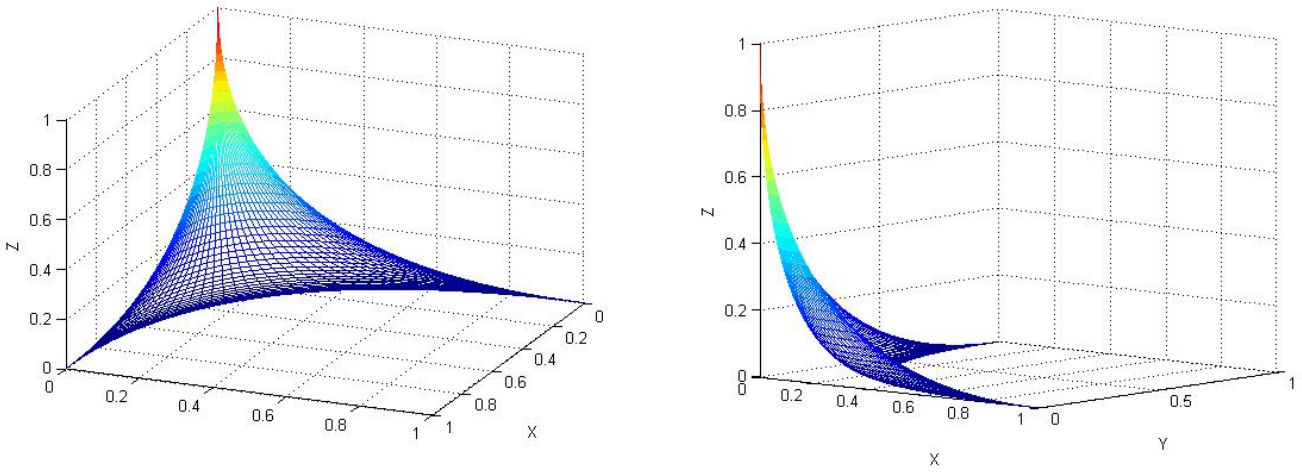


Рис. 25. График поверхности с разных точек обзора

По формуле Остроградского:

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) dS = \iiint\limits_V div a dx dy dz,$$

где a_n - проекция $\overrightarrow{a}$ в направлении нормали.
Добавим к нашей поверхности области, высекаемые ею на координатных плоскостях. Тогда

$$\iint\limits_{S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} = \iiint\limits_V div a dx dy dz = 0$$

Поэтому наш интеграл равен:

$$\iint\limits_S = -\iint\limits_{S_{yz}} - \iint\limits_{S_{xy}} - \iint\limits_{S_{xz}}$$

$$\iint\limits_{S_{yz}} a_n dS = \iint\limits_{\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{r}} (-y)dydz = \left[y = \rho\cos^4\varphi, z = \rho\sin^4\varphi, J = 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi\right] =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^r 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi(-\rho\cos^4\varphi)d\rho d\varphi = [t = \sin\varphi] = -\frac{4}{3}r^3\int\limits_0^1 t^3(1-t^2)^3dt = -\frac{2}{3}r^3(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}) =$$

$$= -\frac{r^3}{30}$$

$$\iint\limits_{S_{xy}} a_n dS = \iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{r}} (-x)dxdy = -\frac{r^3}{30}$$

$$\iint\limits_{S_{xz}} a_n dS = \iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{r}} (-x)dxdy = -\frac{r^3}{30}$$

Значит, искомый поток равен:

$$\iint\limits_S a_n dS = \frac{r^3}{10}$$

Номер 75.8(б)

Найти поток поля:

$$\overrightarrow{a} = x^2 i - y^2 j + z^2 k$$

через поверхность

$$S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}, R > 0\right\},$$

если нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена от начала координат.

Решение

На Рис. 26 ($r = 1$, $R = 2$) построена заданная поверхность.

По формуле Остроградского:

$$\iint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V divadxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V (2x - 2y + 2z)dxdydz =$$

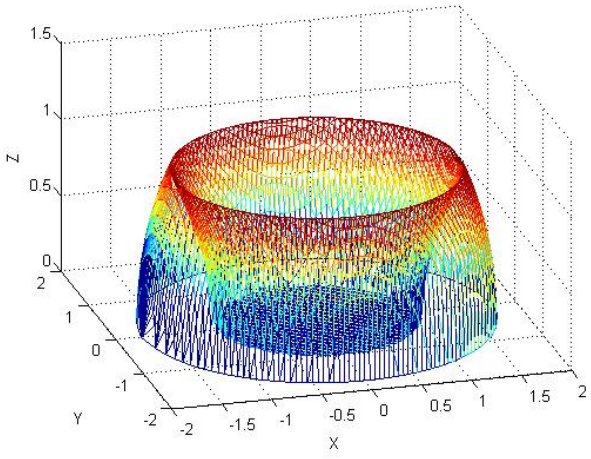


Рис. 26. Общий график - трехмерный

$$= \iint\limits_{2R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3R^2} \int\limits_0^{\sqrt{3R^2-x^2-y^2}} (2x-2y+2z)dzdxdy + \iint\limits_{R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2} \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2-R^2}} (2x-2y+2z)dzdxdy =$$

$$= \iint\limits_{2R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3R^2} (2x-2y)\sqrt{3R^2-x^2-y^2}dxdy + \iint\limits_{2R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3R^2} (3R^2-x^2-y^2)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2} (2x-2y)\sqrt{x^2+y^2-R^2}dxdy + \iint\limits_{R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2} (x^2+y^2-R^2)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\sqrt{2}R}^{\sqrt{3}R} 2r(\cos\varphi - \sin\varphi)\sqrt{3R^2-r^2}rdrd\varphi + 2\pi \int\limits_{\sqrt{2}R}^{\sqrt{3}R} (3R^2-r^2)rdr + 2\pi \int\limits_R^{\sqrt{2}R} (r^2-R^2)rdr =$$

$$= 2\pi(\frac{3R^4}{2} - \frac{5R^4}{4} + \frac{3R^4}{4} - \frac{R^4}{2}) = \pi R^4$$